JOGOS COM POLIEDROS E PERMUTAÇÕES

JORGE REZENDE

1. Introdução

Este artigo descreve um conjunto de jogos didácticos com poliedros e permutações. Num texto escrito já há alguns anos [1] foi atribuído a estes jogos o nome de *puzzles numéricos poliédricos*. Embora a palavra *puzzle* não seja portuguesa, é aquela que, tendo entrado na linguagem comum, melhor identifica o que se pretende com o jogo. Trata-se de juntar peças segundo uma determinada regra e de modo a formar um resultado final coerente.

Tendo uma intenção lúdica, estes jogos servem também para pensar e para ensinar. Por exemplo, as noções elementares da teoria dos grupos (grupos de permutações, operações de grupos sobre conjuntos, grupos cíclicos, etc.), podem ser ilustradas com estes jogos. As noções de simetria a duas e a três dimensões, tão importantes em Matemática e em Física, também podem ser ensinadas com esta ajuda. A construção dos jogos é baseada no cálculo combinatório, pelo que aqui está mais uma área na qual eles podem ser úteis. As soluções, de um determinado puzzle, podem ser calculadas com um computador, pelo que as técnicas de programação podem ser assim utilizadas e, consequentemente, treinadas.

1.1. **Definição geral.** Consideremos um poliedro regular (platónico), semi-regular (arquimedeano) ou dual de semi-regular. As suas faces são polígonos, regulares ou não. Exemplos:

a) O cubo tem seis faces que são quadrados.
b) O dodecaedro tem doze faces que são pentágonos regulares.
c) O cuboctaedro tem catorze faces, polígonos regulares, sendo oito triângulos e quatro quadrados.
d) O icositetraedro deltóide tem vinte e quatro faces todas iguais, que são quadriláteros não regulares (faces deltóides).

Construamos em seguida placas poligonais no mesmo número e com o mesmo formato e tamanho das faces do poliedro. Adjacentemente às

---

O Grupo de Física-Matemática é financiado pelo Ministério da Ciência e Tecnologia.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 52B05, 58D19, 20B05.

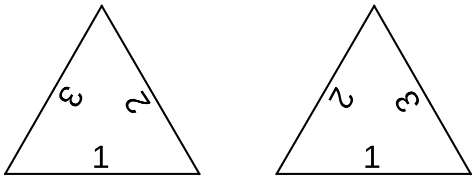

Figura 1.

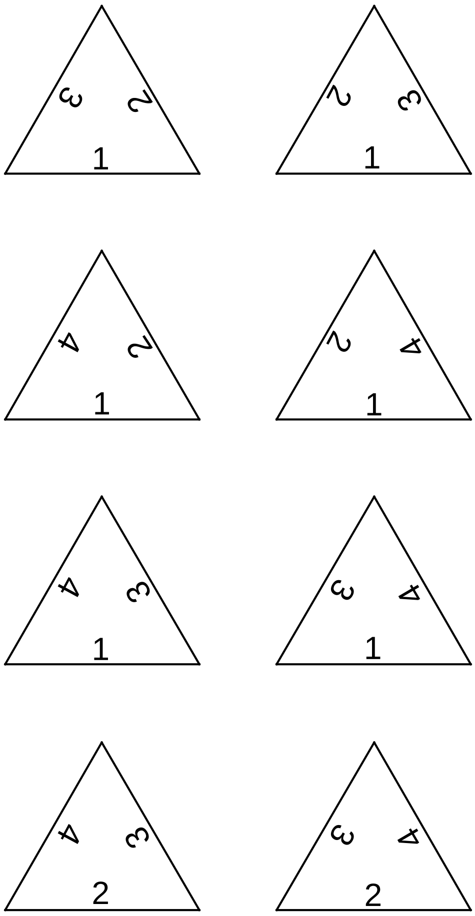

Figura 2.

arestas das placas poligonais escrevem-se números tal como indicam as figuras 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Algumas dessas placas, ou todas, podem ter números escritos de ambos os lados sendo iguais os números adjacentes à mesma aresta (ver figura 6).

Agora, o problema consiste em colocar as placas poligonais sobre as faces do poliedro (placas com um determinado formato sobre as faces

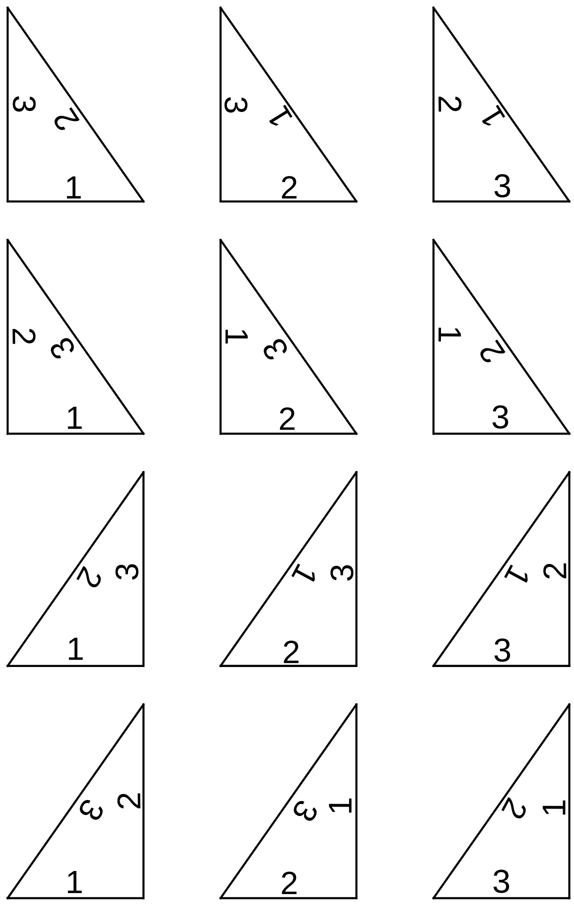

Figura 3.

com o mesmo formato) de tal forma que os dois números (de duas placas distintas) adjacentes a uma mesma aresta, sejam iguais. Se existir, pelo menos, uma solução para este problema dizemos que estamos perante um puzzle numérico poliédrico.

Repare-se que fazer o puzzle equivale a atribuir a cada aresta do poliedro um número. Se cada face tiver números distintos atribuídos às respectivas arestas dizemos que é um puzzle sem números repetidos.

1.2. **Construção prática.** Um material rudimentar que pode ser usado para a construção de um puzzle numérico poliédrico é a cartolina. Podem-se usar diferentes cores para as diferentes placas poligonais e para os diferentes poliedros.

Em primeiro lugar há que ter a base poliédrica na qual se vai resolver o puzzle. Esta base deve possuir, por exemplo, três cantos de fotografia auto-adesivos junto de três vértices distintos em cada face, de forma a que

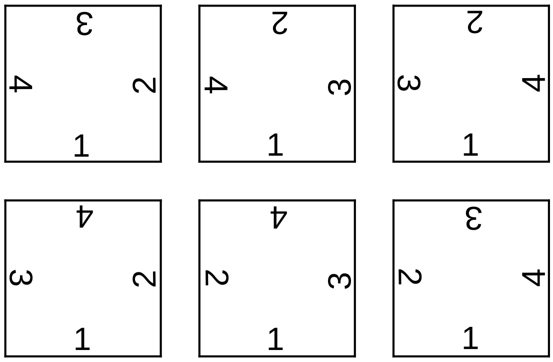

Figura 4.

se possa aí encaixar cada placa poligonal, que deverá ter um tamanho ligeiramente inferior ao da face. A placa poligonal é colocada sobre a face do poliedro como uma fotografia num album.

1.3. **Sumário.** Este artigo está organizado como segue:

Na segunda secção descrevem-se exemplos de puzzles com poliedros platónicos.

Na terceira secção dá-se um método de resolver alguns dos puzzles, baseado na teoria elementar dos grupos. A informação matemática relacionada pode ser obtida nas Referências [4]–[6]. Esta secção termina com exemplos e um desafio ao leitor.

Na quarta secção descrevem-se alguns puzzles sem números repetidos. Isto significa que em cada placa poligonal os números são todos distintos. Claro que há outros possíveis puzzles que não são considerados aqui. Sobre os poliedros mencionados nesta secção, pode-se consultar as Referências [2]–[5].

Na quinta secção discutem-se possíveis generalizações com base nas indicações das secções precedentes.

2. Exemplos de puzzles com poliedros platónicos

Como se sabe os poliedros platónicos têm como faces polígonos regulares e são cinco: o tetraedro (4 triângulos), o cubo (6 quadrados), o octaedro (8 triângulos), o dodecaedro (12 pentágonos) e o icosaedro (20 triângulos). Vamo-nos concentrar, portanto, nos triângulos equiláteros, nos quadrados e nos pentágonos regulares. São três formatos distintos.

No seguimento deste artigo consideraremos um número inteiro $n \geq 1$.

A questão que se coloca é a seguinte: de quantas maneiras distintas é possível atribuir a cada lado de um triângulo equilátero os números $1, 2, \ldots, n$ sem repetir qualquer um deles? Se $n = 1$ ou $n = 2$, não há

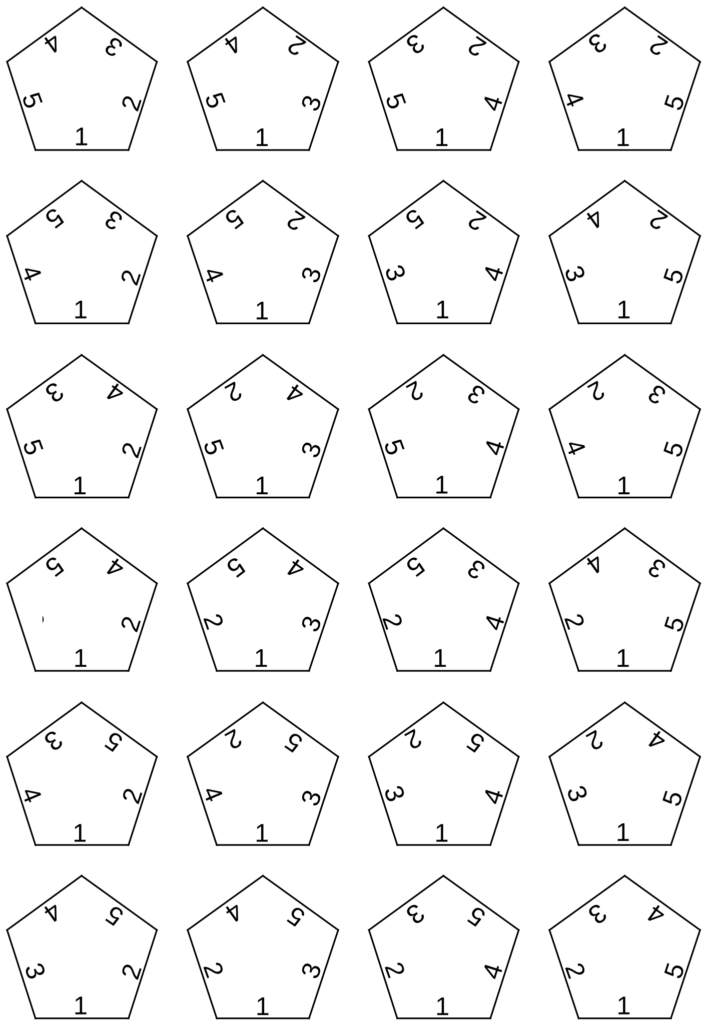

Figura 5.

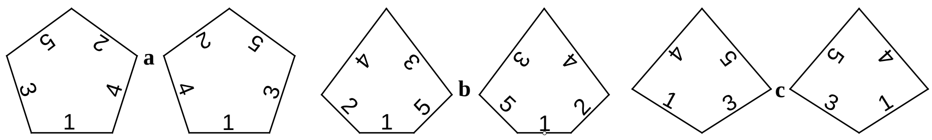

Figura 6. Os dois lados de uma placa: a) pentagonal regular, b) pentagonal irregular, c) deltóide

maneira. Se $n = 3$, há 2 possibilidades: 123 e 132 lidos por esta ordem no sentido directo (contrário ao dos ponteiros do relógio); ver figura 1. Se $n = 4$, há 8 possibilidades: 123, 132, 124, 142, 134, 143, 234 e 243 lidos no sentido directo (ver figura 2). Repare-se que 8 é precisamente o número de faces do octaedro. Se $n = 5$, há 20 possibilidades cuja listagem se deixa ao leitor. Repare-se que 20 é precisamente o número de faces do icosaedro. Se $n = 6$, há 40 possibilidades cuja listagem se deixa, mais uma vez, ao leitor. Repare-se que 40 é precisamente o dobro do número de faces do icosaedro. De facto, no que ao triângulo equilátero diz respeito, o número g de possibilidades é $g = 2\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$.

Identicamente se pode perguntar: de quantas maneiras distintas é possível atribuir a cada lado de um quadrado os números $1, 2, \ldots, n$ sem repetir qualquer um deles? Se $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$, não há maneira. Se $n = 4$, há 6 possibilidades, exactamente o número de faces do cubo (ver figura 4). No que ao quadrado diz respeito o número g de possibilidades é $g = 6\binom{n}{4}$.

E o que se passa com o pentágono regular? De quantas maneiras distintas é possível atribuir a cada lado de um pentágono regular os números $1, 2, \ldots, n$ sem repetir qualquer um deles? Se $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ou $n = 4$, não há maneira. Se $n = 5$, há 24 possibilidades, exactamente o dobro do número de faces do dodecaedro (ver figura 5). No que ao pentágono regular diz respeito o número g de possibilidades é $g = 4!\binom{n}{5}$.

Estes resultados sugerem-nos a construção de placas poligonais tendo em vista puzzles a fazer sobre os cinco sólidos platónicos.

Vejamos, em primeiro lugar, o tetraedro. Atribuindo a cada aresta um número, de forma que não haja repetições em cada face, constatamos a seguinte realidade: se $n = 3$, as placas têm que ser todas iguais; se $n > 3$, não há soluções que esgotem todas as possibilidades.

Consideremos agora o octaedro. Com $n = 4$ podemos construir 8 placas diferentes, que esgotam as possibilidades, com números escritos só num dos lados de cada placa. Neste caso há soluções.

Seja, em seguida, o icosaedro. Com $n = 5$ podemos construir 20 placas diferentes, que esgotam as possibilidades, com números escritos só num dos lados de cada placa. Também aqui há soluções. Com $n = 6$ podemos construir 20 placas diferentes, que esgotam as possibilidades, com números escritos nos dois lados de cada placa. Se num dos lados de uma placa estiverem os números abc, lidos por esta ordem no sentido directo, no outro lado estão os números acb. Mais um caso com soluções.

Consideremos o cubo. Com $n = 4$ podemos construir 6 placas diferentes, que esgotam as possibilidades, com números escritos só num dos lados de cada placa. Este caso tem soluções; por exemplo, a figura 7 mostra uma das soluções para o puzzle relativo ao cubo.

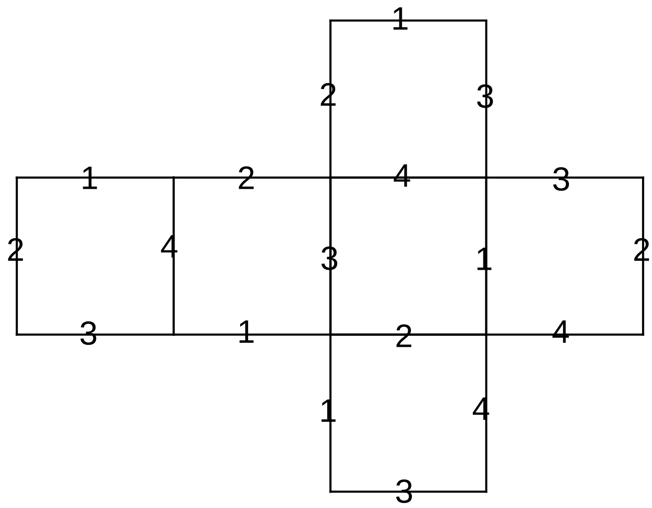

Figura 7. Cubo

Finalmente temos o dodecaedro. Com $n = 5$ podemos construir 12 placas diferentes, que esgotam as possibilidades, com números escritos nos dois lados de cada placa. Se num dos lados de uma placa estiverem os números *abcde*, lidos por esta ordem no sentido directo, no outro lado estão os números *aedcb*. Este é um puzzle bem estudado com várias soluções como adiante veremos.

A maneira espontânea de resolver estes puzzles é por tentativas. Mas há outras. Por exemplo, no caso do icosaedro, com $n = 5$, há uma forma "natural" que a seguir se expõe. Fixemos uma aresta do icosaedro. Há uma que lhe é paralela e outras quatro que lhe são perpendiculares. Ao todo, são seis. Estão colocadas sobre as faces de un cubo "virtual" no qual o icosaedro está inscrito (ver figura 8). Como há cinco desses cubos "virtuais", a cada um deles associamos um dos números $1, 2, \ldots, 5$ de tal forma que cada cubo tenha um número distinto dos outros. Agora, a cada aresta do icosaedro assente sobre a face de um determinado cubo associemos o número desse cubo. Temos assim uma solução do puzzle (ver figura 9).

3. Resolução

Nesta secção desenvolveremos um método de resolução de alguns puzzles numéricos poliédricos utilizando apenas, sem perda de generalidade, aqueles que definimos na secção precedente. Para tal usaremos a teoria dos grupos (ver as Referências [4]-[6]). Em seguida, ilustraremos o método com exemplos simples. A última parte da secção desenvolver-se-á em torno da definição natural de soluções equivalentes.

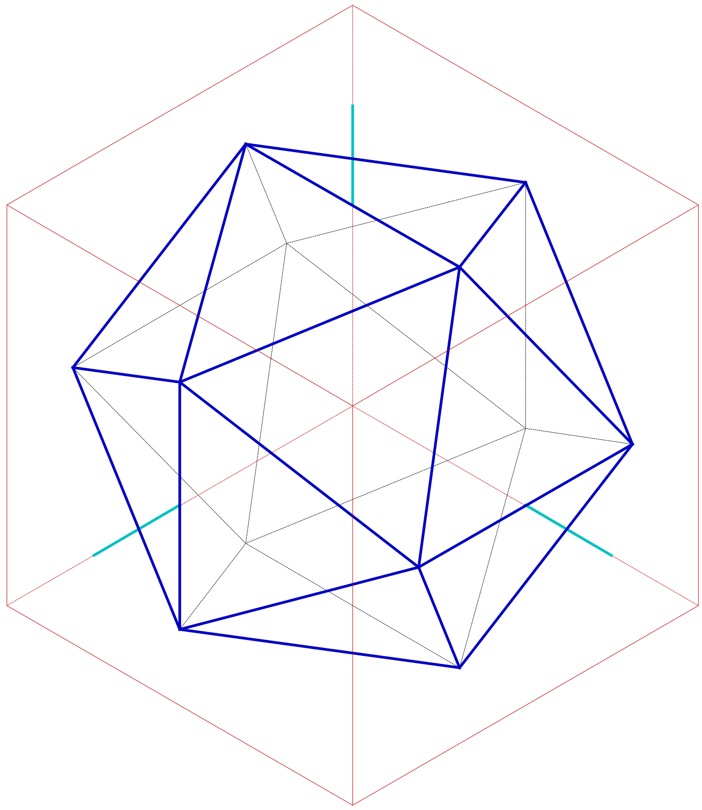

Figura 8. Icosaedro

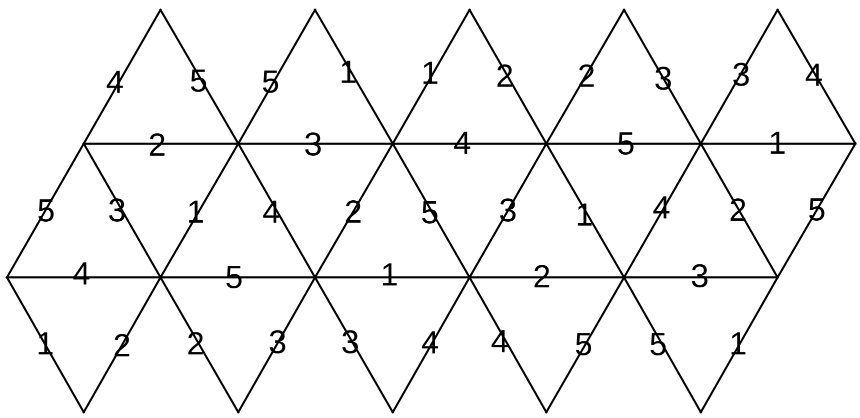

Figura 9. Icosaedro

Na parte restante deste artigo F representa o conjunto das faces, A o conjunto das arestas e P o conjunto das placas.

3.1. **Um método de resolução.** O grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$, S_n, é o conjunto de todas as bijecções

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

com a operação de composição. A identidade designa-se pela letra e: $e(1) = 1, e(2) = 2, \ldots, e(n) = n$.

S_n e os seus subgrupos operam sobre o conjunto das placas, P. Dados $\sigma \in S_n$ e $\pi \in P$, ou seja σ é uma permutação e π é uma placa, então $\sigma\pi$ é a placa que se obtem de π submetendo-a à permutação σ.

Seja G um subgrupo de S_n. G dá origem a uma relação de equivalência. Duas placas, π_1 e π_2 são equivalentes se existir $\sigma \in G$ tal que

$$\pi_2 = \sigma\pi_1.$$

As classes de equivalência associadas a esta relação de equivalência chamam-se órbitas da acção do grupo sobre P.

Entre os subgrupos de S_n há os grupos cíclicos. Seja G um subgrupo cíclico de S_n de gerador σ e de ordem r (o cardinal de G), com $r > 1$. Então $G = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{r-1}\}$; $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$, $\sigma^3 = \sigma \circ \sigma \circ \sigma$, e assim sucessivamente.

Regressemos agora ao poliedro. Um poliedro, dos que temos considerado, tem eixos de simetria. Admitamos que o poliedro que estamos a tratar tem um eixo de rotação de ordem r. Isto significa que se se rodar o poliedro em torno desse eixo, sem deslizar, de um ângulo de $(360/r)^\circ$ [$\equiv (2\pi/r)$ rad], ele passa a ocupar uma situação semelhante àquela de que partiu. Exemplos:

a) O cubo tem 3 eixos de simetria de ordem 4 que são aqueles que unem os centros de faces opostas; se se roda o cubo de 90° em torno de um desses eixos ele adopta uma posição que em nada se distingue da que tinha.
b) O cubo tem 4 eixos de ordem 3 que são aqueles que unem vértices opostos; o ângulo de rotação é neste caso de 120°.

Suponhamos que o grupo G opera no conjunto P das placas correspondentes às faces do poliedro da forma já descrita. Ilustraremos isto com dois exemplos. Seja $n = 4$ e as seis placas correspondentes às 6 faces do cubo as seguintes: $\pi_1 = 1234$, $\pi_2 = 1243$, $\pi_3 = 1324$, $\pi_4 = 1342$, $\pi_5 = 1423$, $\pi_6 = 1432$; isto é, em cada uma das placas os números estão dispostos pela ordem indicada adjacentemente às arestas. Depois desta introdução, vejamos então os dois exemplos:

a) Seja σ o gerador do grupo cíclico G, de ordem 4, tal que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$; então, $\sigma\pi_1 = \pi_1$, $\sigma\pi_2 = \pi_5$, $\sigma\pi_3 = \pi_2$, $\sigma\pi_4 = \pi_3$, $\sigma\pi_5 = \pi_4$, $\sigma\pi_6 = \pi_6$.

b) Seja σ o gerador do grupo cíclico G, de ordem 3, tal que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$; então, $\sigma\pi_1 = \pi_5$, $\sigma\pi_2 = \pi_1$, $\sigma\pi_3 = \pi_4$, $\sigma\pi_4 = \pi_6$, $\sigma\pi_5 = \pi_2$, $\sigma\pi_6 = \pi_3$.

Chamemos $\mu : F \to F$ à função que a cada face do poliedro associa a face que lhe corresponde fazendo uma rotação de $(360/r)^\circ$ em torno do eixo de simetria já considerado; $\mu^2 = \mu \circ \mu$, $\mu^3 = \mu \circ \mu \circ \mu$, e assim sucessivamente.

Consideremos também $\xi : A \to A$ a função que a cada aresta do poliedro associa a aresta que lhe corresponde fazendo a mesma rotação.

Diz-se que duas faces φ_1 e φ_2 são equivalentes se existir i tal que $\varphi_2 = \mu^i\varphi_1$. Diz-se que duas placas π_1 e π_2 são equivalentes se existir i tal que $\pi_2 = \sigma^i\pi_1$. Estas relações de equivalência dão origem a conjuntos de classes de equivalência (órbitas) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$, respectivamente.

Naturalmente o que se espera é que exista uma solução do puzzle a que correspondam uma função bijectiva $u : F \to P$ que a cada face associa a placa que aí está colocada, e uma função $v : A \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que a cada aresta associa o número que aí está colocado, de tal forma que $u \circ \mu(\varphi) = \sigma u(\varphi)$, qualquer que seja a face φ, e também $u^{-1}(\sigma\pi) = \mu \circ u^{-1}(\pi)$ qualquer que seja a placa π, e ainda tal que $v \circ \xi = \sigma \circ v$. Se esta situação acontecer a função u dá origem a uma função bijectiva $U : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ que a cada classe de equivalência elemento de $\mathcal{F}$ associa uma classe de equivalência elemento de $\mathcal{P}$ com o mesmo cardinal. É o que sucede nos exemplos atrás referidos:

a) Exemplos das alíneas a): $\mathcal{F}$ (respectivamente $\mathcal{P}$) tem 3 elementos, classes de equivalência: dois com uma face (respectivamente placa) e um com quatro faces (respectivamente placas).
b) Exemplos das alíneas b): $\mathcal{F}$ (respectivamente $\mathcal{P}$) tem dois elementos, classes de equivalência, ambos com três faces (respectivamente placas).

Este método pode, obviamente, ser generalizado, *mutatis mutandis*, considerando G um subgrupo de S_n, não necessariamente cíclico, e um subgrupo do grupo das simetrias do poliedro.

3.2. **Exemplos.** Somos portanto conduzidos a procurar soluções que respeitem as relações que acabamos de escrever. Vejamos o que se passa com os exemplos que temos estado a tratar.

Exemplos das alíneas a). Na figura 10a, e também na figura 10b, está desenhada uma face-placa, e os números adjacentes às arestas, da classe de equivalência que tem quatro elementos. Os números têm que ser tais que conduzam de facto a uma face-placa da referida classe. As

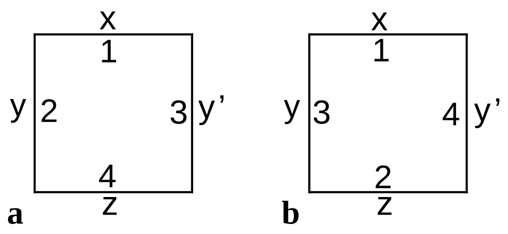

FIGURA 10. Cubo

arestas que têm o y e o $y' \equiv \sigma(y)$ pertencem também a outras faces-placas da mesma classe. As arestas que têm o x e o z pertencem também às faces-placas das outras duas classes: a que tem o x a uma das classes e a que tem o z à outra classe. Fazendo $x = 1$, o y só pode ser 2 (figura 10a) ou 3 (figura 10b); se $y = 2$, então $y' \equiv \sigma(y) = 3$ e $z = 4$; se $y = 3$, então $y' \equiv \sigma(y) = 4$ e $z = 2$.

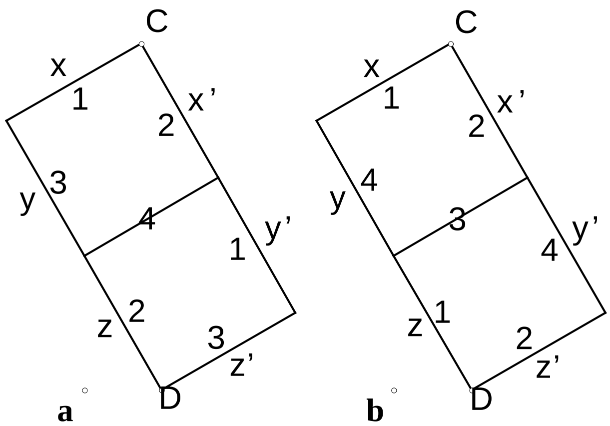

FIGURA 11. Cubo

Exemplos das alíneas b). Na figura 11a, e também na figura 11b, estão desenhadas duas faces-placas pertencentes a cada uma das classes de equivalência. O eixo de simetria é a recta definida pelos vértices C e D. O número x só pode ser 1, 2 ou 3. Se $x = 1$, então $x' \equiv \sigma(x) = 2$ e y só pode ser 3 (figura 11a) ou 4 (figura 11b); se $y = 3$ então $y' \equiv \sigma(y) = 1$, $z = 2$ e $z' \equiv \sigma(z) = 3$; se $y = 4$ então $y' \equiv \sigma(y) = 4$, $z = 1$ e $y' \equiv \sigma(y) = 2$.

A figura 12 mostra a resolução do caso relativo ao dodecaedro, apresentado no quadro 2, utilizando este método. A recta definida pelos vértices C e D é o eixo de simetria, de ordem três. Também aqui $x' \equiv \sigma(x)$, $y' \equiv \sigma(y)$, etc.

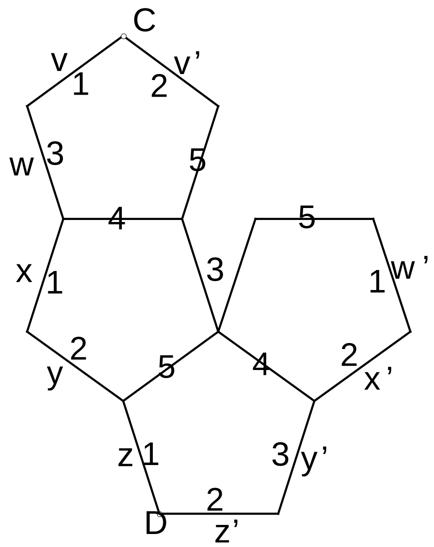

Figura 12. Dodecaedro

3.3. **Soluções equivalentes.** Põe-se agora o problema de saber quantas soluções tem um determinado puzzle. É um problema que fica, em geral, em aberto. Dizemos que duas soluções são equivalentes se existir uma composição envolvendo uma simetria do poliedro e uma permutação dos números que transforme uma solução na outra solução.

Uma forma de distinguir duas soluções que não são equivalentes está ligada à noção de invariante das classes de equivalência. De uma forma ingénua, diz-se que um invariante é uma característica de uma solução que não muda quando se considera uma solução equivalente. Um invariante é uma função cujo conjunto de partida é constituído pelas soluções do puzzle em questão, e que é constante em cada classe de equivalência.

No que diz respeito ao puzzle do cubo desta secção é elementar verificar directamente que o conjunto das soluções só tem uma classe de equivalência.

Já o puzzle do octaedro é mais complicado, embora se possa verificar, também directamente, que tem três classes de equivalência que se distinguem da forma que a seguir se descreve. Numa solução, e relativamente a um vértice, anotemos os números que correspondem às quatro arestas que convergem nesse vértice. Pode haver duas situações: a) quatro números distintos; b) três números distintos, com um deles repetido. Façamos isso para cada um dos seis vértices. Contemos o número de vértices em que acontece a situação a). Podem ser 6, 2 ou 0, que diferenciam as três classes de equivalência.

Os exemplos do cubo e do octaedro mostram que, embora estes dois poliedros sejam duais, os puzzles não o são. Só a primeira classe de equivalência mencionada do octaedro é dual da do cubo.

Consideremos agora uma solução do puzzle do dodecaedro já referido. Vejamos que tem três classes de equivalência. Em cada vértice concorrem três arestas, e, aí, estão três números todos distintos. Há vinte possibilidades, mas nem todas fazem parte da solução. Algumas têm uma repetição. Essas só podem ser em número de 3 ou 7. Esse número, o cardinal desse conjunto de pares, é um invariante. As soluções que têm o número 7 são todas equivalentes. As que têm o número 3 pertencem a duas classes de equivalência. Numa delas cada par está em vértices opostos. Na outra cada par pertence a uma mesma aresta. Esta conclusão foi obtida com a ajuda de um computador.

Nos casos relativos a poliedros com mais faces do que o dodecaedro deve ser bastante mais difícil dar uma resposta precisa como esta. Fica aqui um desafio a todos os leitores.

4. Alguns puzzles sem números repetidos

4.1. **Placas poligonais.** Suponhamos que o poliedro referido na introdução tem f faces com um determinado formato. Convém aqui esclarecer que f é menor ou igual ao número total de faces e que se considera que também têm o mesmo formato duas faces em que cada uma delas seja como que a imagem num espelho (reflexão) da outra. Isto é, diz-se que duas faces têm o mesmo formato se forem isométricas. Por exemplo, o cuboctaedro tem oito faces que são triângulos equiláteros; neste caso $f = 8$ relativamente ao formato do triângulo equilátero. Outro exemplo: o hexaquisoctaedro tem quarenta e oito faces que são triângulos escalenos; estas quarenta e oito faces dividem-se em dois conjuntos de vinte e quatro cada que são reflexões um do outro; neste caso $f = 48$ relativamente ao formato do triângulo escaleno.

Seja agora n um determinado número inteiro maior do que zero. Seja g o número de possibilidades diferentes de distribuir os números $1, 2, 3, \ldots, n$ adjacentemente às arestas de uma das faces referidas sem repetir na mesma face o mesmo número. Exemplos:

a) Se $n = 3$ e as faces forem triângulos equiláteros o número g de possibilidades é 2 (ver figura 1).
b) Se $n = 4$ e as faces forem triângulos equiláteros o número g de possibilidades é 8 (ver figura 2).
c) Se $n = 3$ e as faces forem triângulos escalenos o número g de possibilidades é 12 (ver figura 3).

d) Se $n = 4$ e as faces forem quadrados o número g de possibilidades é 6 (ver figura 4).
e) Se $n = 5$ e as faces forem pentágonos regulares o número g de possibilidades é 24 (ver figura 5).

O quadro 1 dá o número de possibilidades g em função do número n e em função do polígonos, face de um determinado formato do poliedro.

Por formato deltóide entende-se o formato das faces do icositetraedro deltóide ou do hexacontaedro deltóide; são quadriláteros irregulares em que os lados são iguais dois a dois; os lados iguais têm um vértice comum. Ver figura 6c.

(Quadro 1)

$n \rightarrow$ **formato**$\downarrow$	3	4	5	6	7	8
triângulo equilátero	2	8	20	40	70	112
quadrado	–	6	30	90	210	420
pentágono regular	–	–	24	144	504	1344
hexágono regular	–	–	–	120	840	3360
formato deltóide	–	24	120	360	840	1680
formato rômbico	–	12	60	180	420	840
pentágono irregular	–	–	120	720	2520	6720
triângulo isósceles	6	24	60	120	210	336
triângulo escaleno	12	48	120	240	420	672

Por formato rômbico entende-se o de um quadrilátero com os lados todos iguais mas que não é quadrado; por exemplo, o triacontaedro rômbico tem as faces rômbicas.

Pentágono irregular designa, abreviadamente, o formato das faces do icositetraedro pentagonal ou do hexacontaedro pentagonal; são pentágonos irregulares com três lados iguais entre si e os restantes dois iguais entre si; estes últimos têm um vértice comum e as faces são simétricas. Ver figura 6b.

No que diz respeito ao triângulo escaleno o número g inclui as reflexões. Ver figura 3.

Para construir o quadro 1 a fórmula a utilizar, no caso dos polígonos regulares, é $g = n!/\left((n-i)!i\right)$ em que i é o número de lados. Os números da linha referente ao formato deltóide são quatro vezes os números da linha referente ao quadrado. Os números da linha referente ao formato rômbico são duas vezes os números da linha referente ao quadrado. Os números da linha referente ao pentágono irregular são cinco vezes os números da linha referente ao pentágono regular. Os números da linha referente ao triângulo isósceles são três vezes os números da linha referente ao triângulo equilátero. Os números da linha referente ao triângulo escaleno são seis vezes os números da linha referente ao triângulo equilátero.

4.2. **Definição.** Regressemos ao poliedro e às suas f faces de um determinado formato. Relembremos que f é menor ou igual do que o número total de faces do poliedro. Vamos agora definir um processo de construção de placas correspondentes. Decomponhamos esse conjunto de f faces em p subconjuntos de tal modo que o subconjunto de ordem j tem f_j faces: $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_p = f$. Admitamos que no quadro 1 e na linha correspondente ao formato das faces está um dos números $f_j$ou $2f_j$, para todo $j = 1, 2, 3, \ldots, p$; se o número que se encontra no quadro for f_j as placas têm números desenhados só de um dos lados; se o número que se encontra no quadro for $2f_j$ as placas têm números desenhados nos dois lados; em qualquer dos casos esgotarão todas as possibilidades (f_j ou $2f_j$) de, para um determinado n, escrever os números $1, 2, 3, \ldots, n$, adjacentemente às arestas das placas poligonais sem números repetidos em cada lado da placa e de acordo com a definição geral.

A construção das placas poligonais por este processo faz-se relativamente a todos os formatos das faces do poliedro.

No caso de existir solução, para o problema já exposto na definição geral estamos, portanto, perante um puzzle numérico poliédrico sem números repetidos.

4.3. **Exemplos.** Apresentam-se em seguida quadros com alguns casos relativos a poliedros regulares (sistematizando o conteúdo da segunda secção), poliedros semi-regulares e duais dos poliedros semi-regulares.

4.3.1. *Poliedros regulares (quadro 2).*

(Quadro 2)

nome	**faces** (f)	n	g
cubo	6 quadrados	4	6
octaedro	8 triângulos equiláteros	4	8
dodecaedro	12 pentágonos regulares	5	24
icosaedro	20 triângulos equiláteros	5	20
icosaedro	20 triângulos equiláteros	6	40

A interpretação deste quadro é simples.

Nos casos do cubo e do octaedro, para $n = 4$, o número g de possibilidades é precisamente igual ao número de faces; nestes casos as placas poligonais só têm números desenhados de um dos lados.

No caso do dodecaedro, para $n = 5$, o número g de possibilidades é o dobro do número de faces; aqui cada placa poligonal tem de um dos lados números colocados numa determinada sequência no sentido directo e do outro lado números colocados pela mesma ordem mas no sentido retrógrado, de forma a esgotar as 24 possibilidades.

O caso do icosaedro, para $n = 5$, é idêntico ao do cubo ou do octaedro, isto é, as placas só têm números desenhados de um dos lados; para $n = 6$, o caso do icosaedro é idêntico ao do dodecaedro: placas desenhadas com números dos dois lados.

O tetraedro não aparece no quadro visto que os casos que há ou são triviais ou não têm solução.

Para todos os casos do quadro 2 há soluções como já vimos.

4.3.2. *Poliedros semi-regulares (quadro 3).*
(Quadro 3)

nome	**faces** (f)	n	g
cuboctaedro rômbico	8 triângulos equiláteros	4	8
	+ 18 quadrados	4	6
cuboctaedro	8 triângulos equiláteros	4	8
	+ 6 quadrados	4	6
icosidodecaedro	20 triângulos equiláteros	5	20
	+ 12 pentágonos regulares	5	24
cubo oblíquo	32 triângulos equiláteros	4	8
	+ 6 quadrados	4	6
dodecaedro oblíquo	80 triângulos equiláteros	5	20
	+ 12 pentágonos regulares	5	24
icosidodecaedro rômbico	20 triângulos equiláteros	5	20
	+ 30 quadrados	5	30
	+ 12 pentágonos regulares	5	24

O cuboctaedro rômbico pode ser de dois tipos: com ou sem simetria equatorial.

Tomemos, no quadro 3, o caso relativo ao cuboctaedro rômbico; como há 18 faces quadradas e o número de possibilidades, para $n = 4$, é 6, isso significa que cada possibilidade aparece 3 vezes nas placas quadradas. Situação idêntica aparece no caso relativo ao cubo oblíquo ou no caso relativo ao dodecaedro oblíquo no que diz respeito às placas triangulares.

Para todos estes casos há soluções; por exemplo, a figura 13 mostra uma das soluções para o puzzle do cuboctaedro.

Repare-se que há mais possibilidades com soluções do que aquelas que figuram no quadro 3. Deixa-se ao leitor a sua descoberta.

No quadro 3 não figuram os poliedros semi-regulares obtidos por truncamento. No entanto, é possível organizar puzzles com estes poliedros a partir dos poliedros que figuram no quadro 3. Por exemplo, o octaedro truncado tem 8 faces hexagonais e 6 quadradas. As placas poligonais

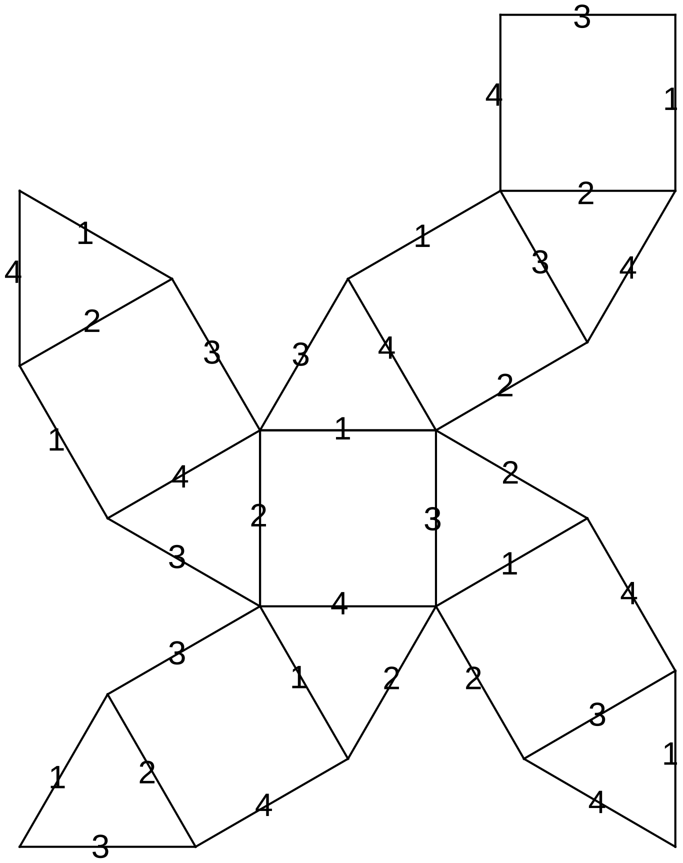

FIGURA 13. Cuboctaedro

relativas a este poliedro podem ser construídas a partir das do cuboctaedro fazendo com que as hexagonais que fiquem vizinhas não tenham qualquer número (ou tenham o número 0) adjacente à aresta comum.

A mesma técnica pode ser usada para outros poliedros obtidos por truncamento. Assim, como o octaedro truncado resulta do cuboctaedro, temos que: o tetraedro truncado resulta do octaedro; o icosaedro truncado resulta do icosidodecaedro; o cubo truncado resulta do cuboctaedro; o dodecaedro truncado resulta do icosidodecaedro; o cuboctaedro truncado resulta do cuboctaedro rômbico; o icosidodecaedro truncado resulta do icosidodecaedro rômbico.

4.3.3. *Duais dos poliedros semi-regulares (quadro 4).* Neste quadro não estão considerados os trapezoedros arquimedianos (cujas faces são deltóides) nem as pirâmides duplas arquimedianas (cujas faces são triângulos isósceles), visto que são em número infinito.

O icositetraedro deltóde pode ser de dois tipos: com ou sem simetria equatorial.

É possível que os casos do quadro 4 relativos ao icositetraedro deltóide sem simetria equatorial, ao dodecaedro rômbico, ao hexacontaedro pentagonal e ao triaquistetraedro, não tenham solução. Todos os outros casos apresentados no quadro têm solução. Por exemplo, o icositetraedro deltóide com simetria equatorial tem a solução que a figura 14 mostra.

Quadro 4

nome	**faces** (f)	n	g
icositetraedro deltóide	24 faces deltóides	4	24
dodecaedro rômbico	12 faces rômbicas	4	12
triacontaedro rômbico	30 faces rômbicas	5	60
icositetraedro pentagonal	24 faces pentagonais	–	–
hexacontaedro pentagonal	60 faces pentagonais	5	120
hexacontaedro deltóide	60 faces deltóides	5	120
triaquistetraedro	12 triângulos isósceles	4	24
triaquishexaedro	24 triângulos isósceles	4	24
pentaquisdodecaedro	60 triângulos isósceles	5	60
triaquisoctaedro	24 triângulos isósceles	4	24
triaquisicosaedro	60 triângulos isósceles	5	60
hexaquisoctaedro	48 triângulos escalenos	4	48
hexaquisicosaedro	120 triângulos escalenos	5	120

A figura 15 mostra a resolução do caso relativo ao hexacontaedro deltóide, apresentado no quadro 4, utilizando o método descrito na terceira secção. O eixo de simetria é a recta CD que é de ordem cinco.

5. Generalizações

Quando se trata de dar uma definição de puzzle, que generalize os exemplos anteriores, e que seja suficientemente interessante, encontram-se manifestas dificuldades. Por um lado, porque ser suficientemente interessante é subjectivo. Por outro lado, porque se corre o risco de, ao tentar generalizar, se banalizar a definição. Por estas razões, não parece haver uma definição evidente. Todavia, nesta secção far-se-á um esforço nesse sentido.

Suponhamos que o poliedro tem faces de k formatos distintos e seja F_j o conjunto de faces de um determinado formato: $F = \cup_{j=1}^{k} F_j$. A tarefa consiste, pois, em construir o conjunto P das placas correspondentes: $P = \cup_{j=1}^{k} P_j$. Os números inscritos nas placas são $\leq n$.

Sejam G_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, subgrupos de S_n. G_j e P_j são tais que G_j opera da forma natural já descrita sobre P_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Qualquer

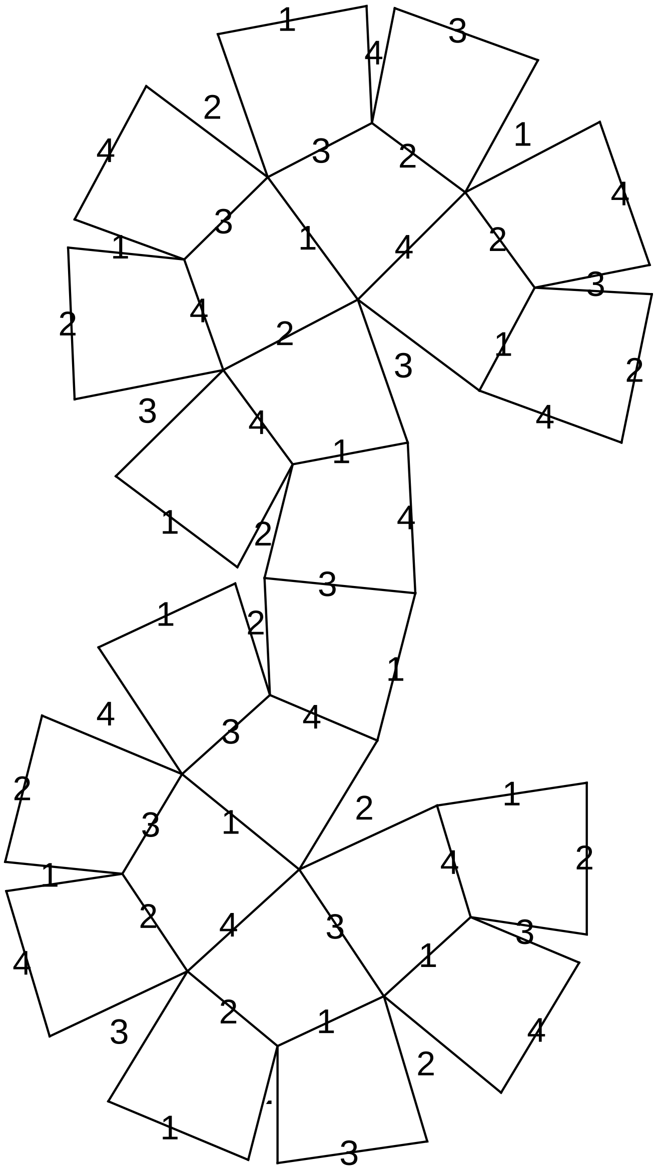

Figura 14. Icositetraedro deltóide

que seja P_j há sempre um subgrupo de S_n que opera sobre P_j: $\{e\}$. O conjunto dos subgrupos possíveis não é, portanto, vazio.

Consequentemente há pares (P_j, G_j) em que o cardinal do conjunto das órbitas respectivas é mínimo. São esses pares, e os que se aproximam desse mínimo, que não trivializam o conjunto P_j de placas. Esta formulação peca por algum subjectivismo, mas não se vê como lhe escapar. Exemplos:

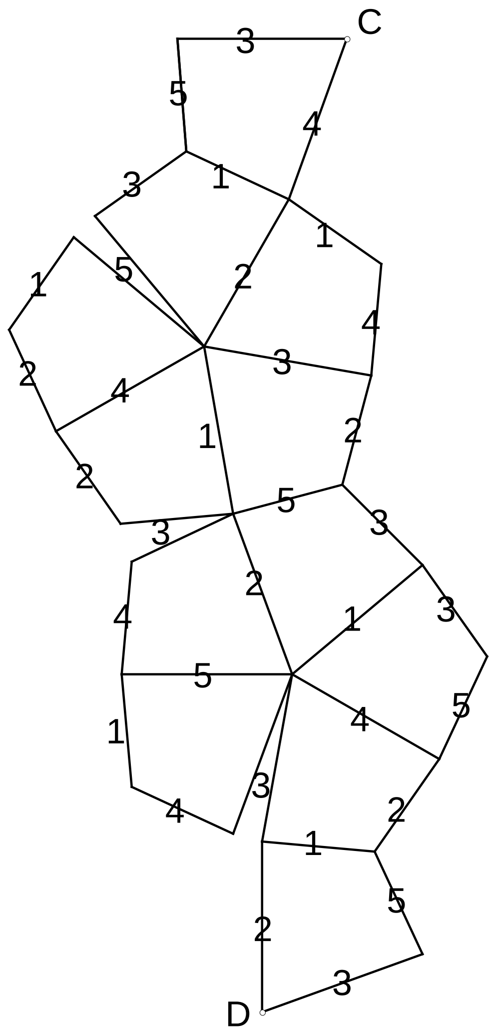

FIGURA 15. Hexacontaedro deltóide

a) Consideremos o caso do dodecaedro. Construamos as 12 placas da forma descrita na segunda secção. Seja G o subgrupo de S_5, isomorfo a S_4, constituído pelas permutações que deixam o 5 fixo. Então, G opera sobre P e há uma só órbita constituída por P.
b) Seja ainda o dodecaedro. Construamos as 12 placas da forma que a seguir se descreve. Os números estão só num dos lados de cada placa. Fixemos o 5. Nas outras posições, lidas no sentido directo, estão as 12 permutações pares de $\{1, 2, 3, 4\}$. Seja G o subgrupo de S_5 constituído pelas permutações pares que deixam o 5 fixo. Então, G opera sobre P e há uma só órbita constituída por P.

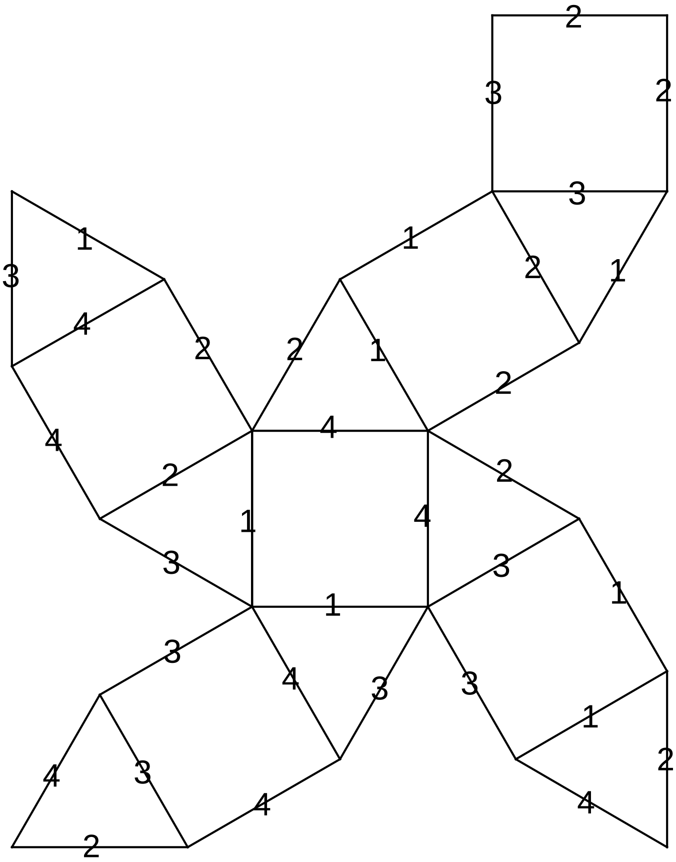

Figura 16. Cuboctaedro

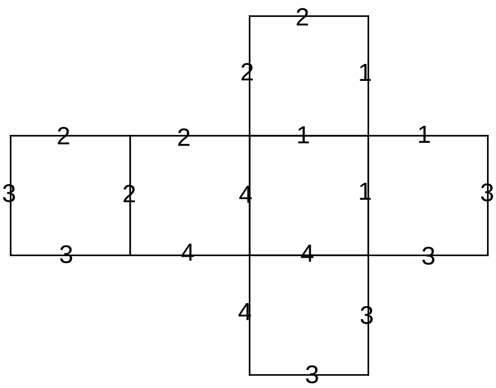

Figura 17. Cubo

c) Consideremos o icositetraedro pentagonal. Construamos as 24 placas da forma que a seguir se descreve. Os números estão só

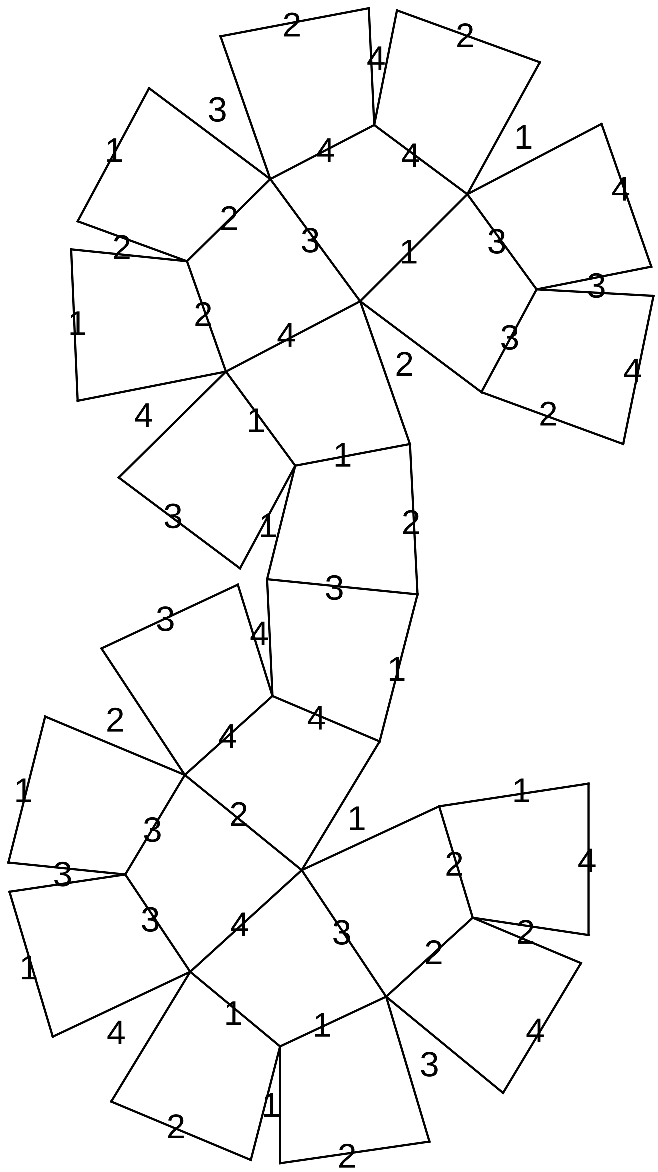

Figura 18. Icositetraedro deltóide

num dos lados de cada placa. Fixemos o 5. Nas outras posições, lidas no sentido directo, estão as 24 permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$. Seja G o subgrupo de S_5 constituído pelas permutações que deixam o 5 fixo. Então, G opera sobre P e há uma só órbita constituída por P.

d) As figuras 16, 17 e 18 mostram puzzles com números repetidos. As placas têm os números $1, 2, 3, 4$ escritos só de um dos lados.

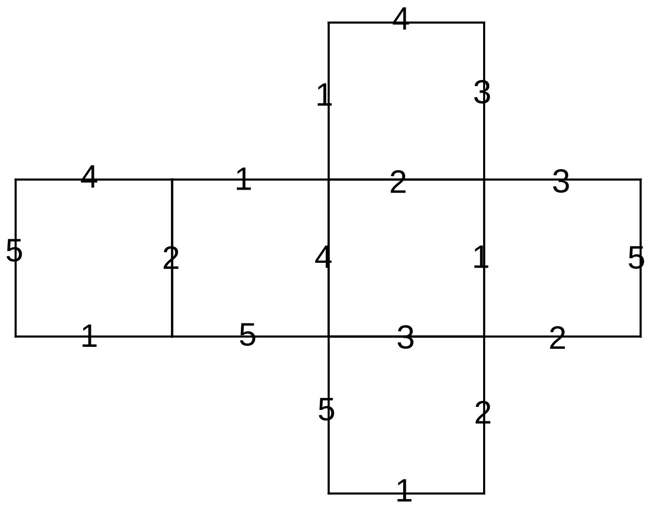

FIGURA 19. Cubo

Em todos estes três casos G é S_4 e cada conjunto de placas do mesmo formato constitui a órbita única.

e) Na figura 19, de um puzzle relativo ao cubo, as placas têm os números $1, 2, 3, 4, 5$ escritos só de um dos lados. G é o subgrupo de S_5, isomorfo a S_3, que mantém fixos os números 1 e 2, e P constitui a órbita única.

Agradecimentos

O autor agradece às Professoras Margarida Mendes Lopes e Ilda Perez o apoio que lhe deram. Agradece particularmente à Professora Ilda Perez pelo cuidado que teve em ler o artigo e pelas sugestões que deu no sentido de melhorar a sua compreensão.

Nota

Este artigo foi publicado no Boletim da SPM nº 43, de Outubro de 2000.

Referências

[1] Jorge Rezende: *Puzzles numéricos poliédricos* (1988).
[2] Tiberiu Roman: *Reguläre und halbreguläre polyeder*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1968.
[3] Manus J. Wenninger: *Polyhedron Models*. Cambridge University Press 1985.
[4] M. A. Armstrong: *Groups and Symmetry*. Berlin: Springer-Verlag 1988.
[5] Marcel Berger: *Géométrie, 3, convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes*. Cedic / Fernand Nathan.
[6] Serge Lang: *Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1965.

Grupo de Física-Matemática da Universidade de Lisboa, Av. Prof. Gama Pinto 2, 1649-003 Lisboa, Portugal, e Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
E-mail address: `rezende@cii.fc.ul.pt`