SOBRE OS *PUZZLES COM POLIEDROS E NÚMEROS*

JORGE REZENDE

1. Introdução

Publicou a SPM, em 2001, um conjunto de jogos didácticos intitulado *Puzzles com poliedros e números* [2]. Trata-se de um conjunto de sete cartolinas com oito puzzles, envolvendo poliedros, para construir. Qualquer pessoa com idade e conhecimento suficientes para manipular as cartolinas e capacidade de identificar números, está em condições de tirar proveito destes jogos, mesmo que não disponha de cultura matemática. Os puzzles podem ser feitos por tentativas, e diversas tarefas simples podem ser propostas por educadores que tenham conhecimentos mais aprofundados.

Para aqueles que possuam já conhecimentos matemáticos, de nível secundário ou superior, os puzzles podem suscitar questões, que vão desde as mais elementares às mais complexas, envolvendo, por exemplo, o cálculo combinatório, a teoria dos grupos (incluindo os grupos de simetrias e os grupos de permutações), a programação. O objectivo deste trabalho é o de, através de exemplos simples, apontar alguns dos caminhos possíveis. Ver também as referências [1] e [3].

2. Definição de puzzles pela via do cálculo combinatório

Consideremos, para simplificar, um poliedro platónico. Tem faces que são polígonos regulares. Construamos placas com o mesmo formato e tamanho das faces do poliedro. Adjacentemente aos lados dessas placas-polígonos desenhemos números $1, 2, \ldots, n$, como indicam as figuras 1,2 e 3. Suponhamos que em cada placa os números são todos distintos. Seja j o número de lados das placas: $j = 3$ nos casos do tetraedro, do octaedro e do icosaedro; $j = 4$ no caso do cubo; $j = 5$ no caso do dodecaedro.

Quantas placas diferentes é possível construir desta forma? Eis aqui uma questão que pode servir de exercício de cálculo combinatório, e, para a qual, há muitas variantes. Como no caso dos *puzzles* editados

O Grupo de Física-Matemática é financiado pelo Ministério da Ciência e Tecnologia.

Neste texto se baseia a intervenção do autor, no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática (ENSPM 2002).

pela SPM as placas estão, efectivamente, desenhadas, podem aqueles servir de estímulo à imaginação.

Sendo ν o número de placas diferentes a resposta à pergunta é a seguinte:

a) Para $j = 3$ e $n = 3$, então $\nu = 2$ (ver figura 1).
b) Para $j = 3$ e $n = 4$, então $\nu = 8$ (ver figura 2); 8 **é precisamente o número de faces do octaedro**. Dá origem ao puzzle do octaedro.
c) Para $j = 3$ e $n = 5$, então $\nu = 20$; 20 **é precisamente o número de faces do icosaedro**. Dá origem ao puzzle (1) do icosaedro.
d) Para $j = 3$ e $n = 6$, então $\nu = 40$; 40 **é precisamente o dobro do número de faces do icosaedro**.
e) Para $j = 4$ e $n = 4$, então $\nu = 6$ (ver figura 3); 6 **é precisamente o número de faces do cubo**. Dá origem ao puzzle do cubo.
f) Para $j = 5$ e $n = 5$, então $\nu = 24$; 24 **é precisamente o dobro do número de faces do dodecaedro**.

A fórmula geral é

$$\nu = (j-1)!\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!\,j}\,.$$

Um facto que imediatamente ressalta é **a relação tão estreita entre o número de possibilidades ν para as placas e o número de faces dos diferentes poliedros**. Desta simples **observação** parte a ideia para a construção dos puzzles, com a convicção de algo de matematicamente relevante poderá daí resultar.

Fixemo-nos, daqui para diante, no caso do octaedro. Com $j = 3$ e $n = 4$, temos 8 placas distintas (figura 2), que constituem o puzzle do octaedro. Fazer o puzzle (ou obter uma solução do puzzle), consiste em colocar cada placa sobre uma face do octaedro de modo a que adjacentemente a cada aresta fique o mesmo número.

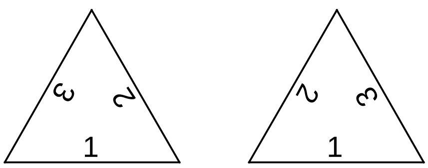

FIGURA 1.

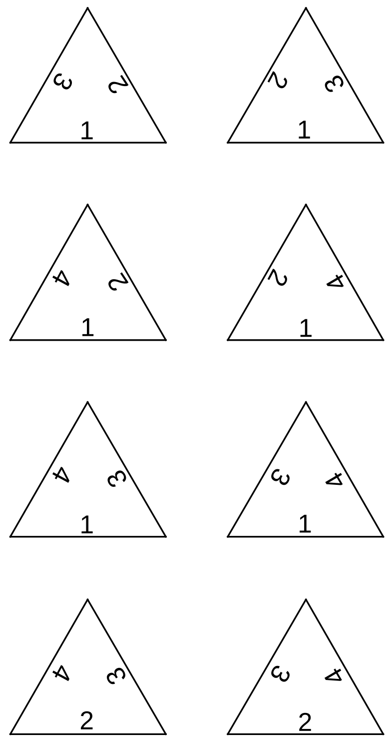

FIGURA 2.

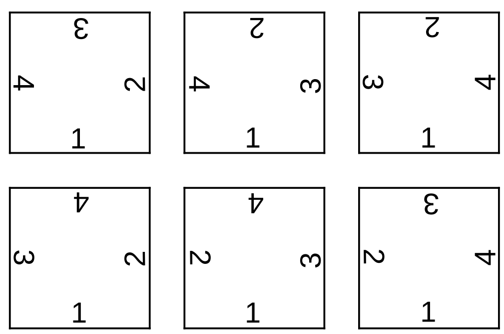

FIGURA 3.

3. O OCTAEDRO: NOTAÇÕES, PLANIFICAÇÕES, SOLUÇÕES

A figura 4 representa um octaedro centrado na origem. O conjunto das arestas está notado $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{12}\}$. Notamos com a letra F o conjunto das faces.

As figuras 5 e 6 representam duas planificações diferentes do octaedro com as arestas bem identificadas.

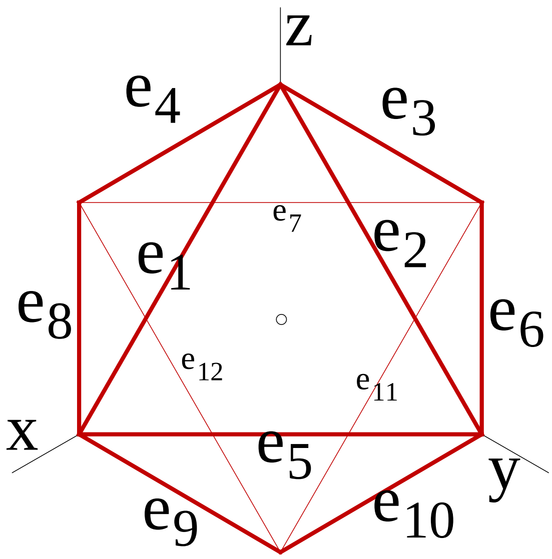

FIGURA 4.

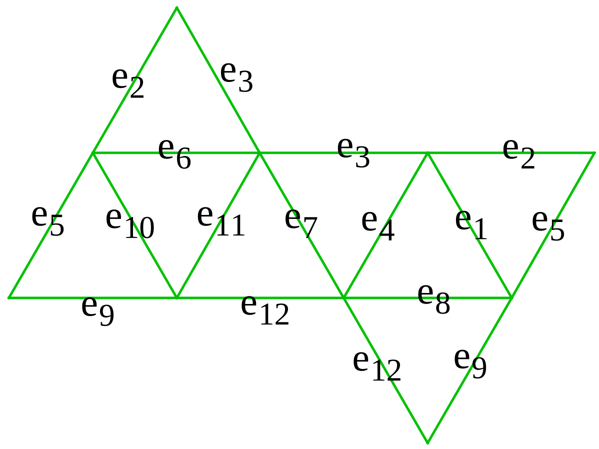

FIGURA 5.

A figura 7 tem duas representações da mesma solução do puzzle do octaedro. A primeira representação é uma planificação do puzzle tal como na prática se faz. A segunda representação é mais esquemática e põe em evidência que uma solução do puzzle associa a cada aresta um número do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

De facto dar uma solução do puzzle implica dar uma função $\varepsilon : E \to \{1, 2, 3, 4\}$ (a recíproca não é verdadeira). Diremos que esta função ε é

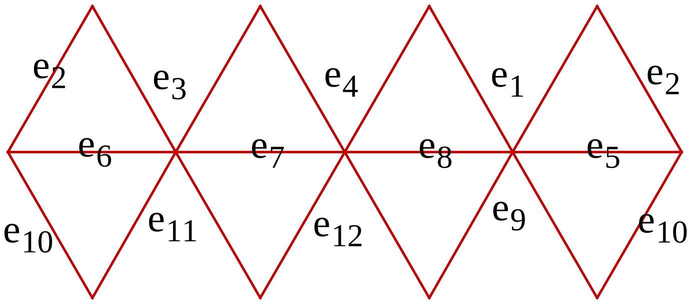

FIGURA 6.

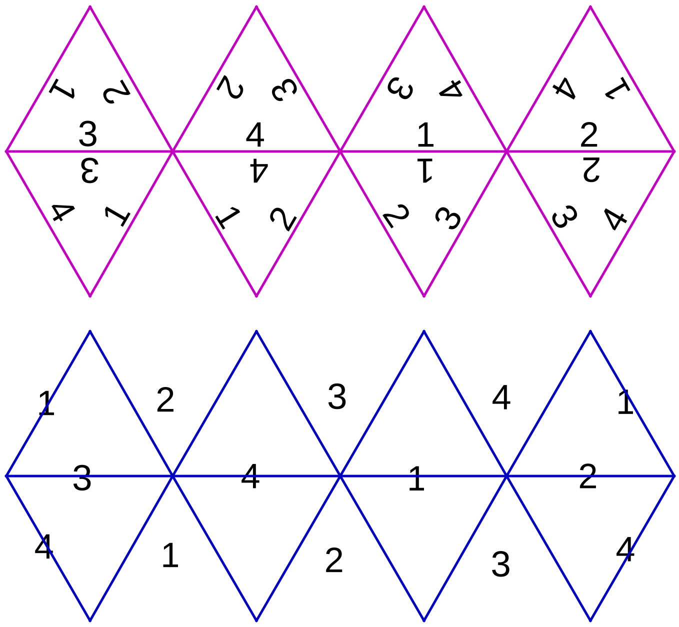

FIGURA 7.

uma solução do puzzle. No caso da figura 7, ε é a seguinte função:

$$\begin{array}{llll} e_1 \mapsto 4 & e_2 \mapsto 1 & e_3 \mapsto 2 & e_4 \mapsto 3 \\ e_5 \mapsto 2 & e_6 \mapsto 3 & e_7 \mapsto 4 & e_8 \mapsto 1 \\ e_9 \mapsto 3 & e_{10} \mapsto 4 & e_{11} \mapsto 1 & e_{12} \mapsto 2 \end{array}.$$

4. OS PUZZLES E A TEORIA ELEMENTAR DOS GRUPOS

4.1. **O grupo das permutações.** Seja $n \in \mathbb{N}$. O grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$, S_n, é o conjunto das bijecções $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to$

$\{1, 2, \ldots, n\}$, com a composição de funções como operação interna. Usa-se a notação: $\sigma_1 \circ \sigma_2 \equiv \sigma_1\sigma_2$. A identidade designa-se aqui por σ_0: $\sigma_0(1) = 1, \sigma_0(2) = 2, \ldots, \sigma_0(n) = n$.

Escreve-se $\sigma = (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k) \cdots (\beta_1\beta_2 \cdots \beta_l)$, se

$$\begin{gathered}\sigma(\alpha_1) = \alpha_2, \sigma(\alpha_2) = \alpha_3, \ldots, \sigma(\alpha_k) = \alpha_1, \ldots, \\ \sigma(\beta_1) = \beta_2, \sigma(\beta_2) = \beta_3, \ldots, \sigma(\beta_k) = \beta_1\end{gathered}$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Se $\gamma \in \{1, 2, \ldots, n\} \diagdown \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$, então $\sigma(\gamma) = \gamma$.

No caso do octaedro interessa a situação em que $n = 4$. No que se segue a, b, c, d são distintos elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$. S_4, grupo de ordem 24, é composto por σ_0, pelos 6 elementos do tipo $(abcd)$, pelos 8 elementos do tipo (abc), pelos 3 elementos do tipo $(ab)(cd)$ e pelos 6 elementos do tipo (ab).

4.2. **O grupo do octaedro.** O grupo do octaedro, Ω, é constituido por todas as isometrias ω de $\mathbb{R}^3$, que associam vértices a vértices e, consequentemente, arestas a arestas, faces a faces. Usa-se a notação: $\omega_1 \circ \omega_2 \equiv \omega_1\omega_2$. Se $\omega \in \Omega$, então ω induz funções bijectivas $F \longrightarrow F$, $E \longrightarrow E$, que, por abuso de notação, designamos pela mesma letra ω. Note-se que nem todas as bijecções $F \longrightarrow F$, $E \longrightarrow E$, correspondem a elementos de Ω.

Um elemento de Ω é, por exemplo, a simetria central $\omega(x, y, z) = -(x, y, z)$, que induz a aplicação $\omega : E \longrightarrow E$

$$\begin{array}{cccc} \omega(e_1) = e_{11} & \omega(e_2) = e_{12} & \omega(e_3) = e_9 & \omega(e_4) = e_{10} \\ \omega(e_5) = e_7 & \omega(e_6) = e_8 & \omega(e_7) = e_5 & \omega(e_8) = e_6 \\ \omega(e_9) = e_3 & \omega(e_{10}) = e_4 & \omega(e_{11}) = e_1 & \omega(e_{12}) = e_2 \end{array}.$$

A simetria central tem determinante -1. As simetrias de determinante 1 (Ω^+), podem ser vistas assim: transporta-se uma face pré-escolhida de modo a coincidir com uma das oito faces do octaedro; como há três maneiras de as fazer coincidir (são triângulos equiláteros), há ao todo 24 (3×8) simetrias de determinante 1. A figura 8 mostra uma dessas simetrias. Nesse caso a função $\omega : E \rightarrow E$, é a seguinte:

$$\begin{array}{cccc} \omega(e_1) = e_4 & \omega(e_2) = e_7 & \omega(e_3) = e_{12} & \omega(e_4) = e_8 \\ \omega(e_5) = e_3 & \omega(e_6) = e_{11} & \omega(e_7) = e_9 & \omega(e_8) = e_1 \\ \omega(e_9) = e_2 & \omega(e_{10}) = e_6 & \omega(e_{11}) = e_{10} & \omega(e_{12}) = e_5 \end{array}.$$

A vantagem desta forma de ver as simetrias de Ω^+ está em que ela pode ser facilmente adaptada a outros poliedros, e ser usada na sua computação num programa informático.

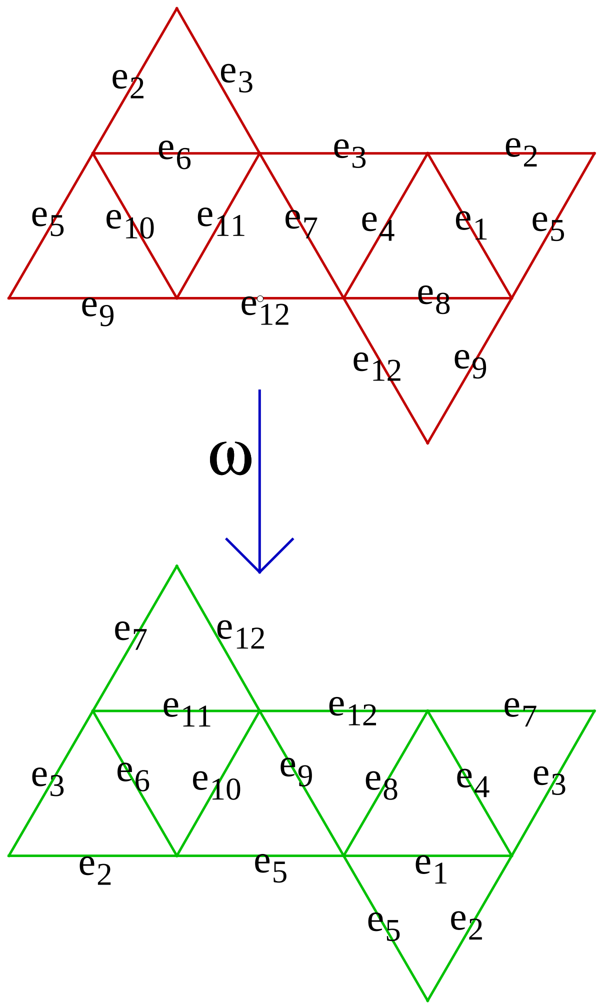

Figura 8.

Outra maneira de contar as simetrias de Ω^+ é a seguinte: a identidade (1); as rotações de 90°, 180°, 270° em torno dos três eixos que unem vértices opostos (9); as rotações de 180° em torno dos seis eixos que unem arestas opostas (6); as rotações de 120° e 240° em torno dos quatro eixos que unem os centros de faces opostas (8).

As simetrias de determinante -1 (Ω^-) são as composições das simetrias de Ω^+ com a simetria central. O cardinal de Ω, a ordem de Ω, é, consequentemente, 48.

Vejamos dois exemplos:

a) Consideremos, nas figura 9 e 10, as rotações de 0°, 90°, 180° e 270° em torno em torno do eixo dos zz. Formam um subgrupo de Ω^+ de ordem

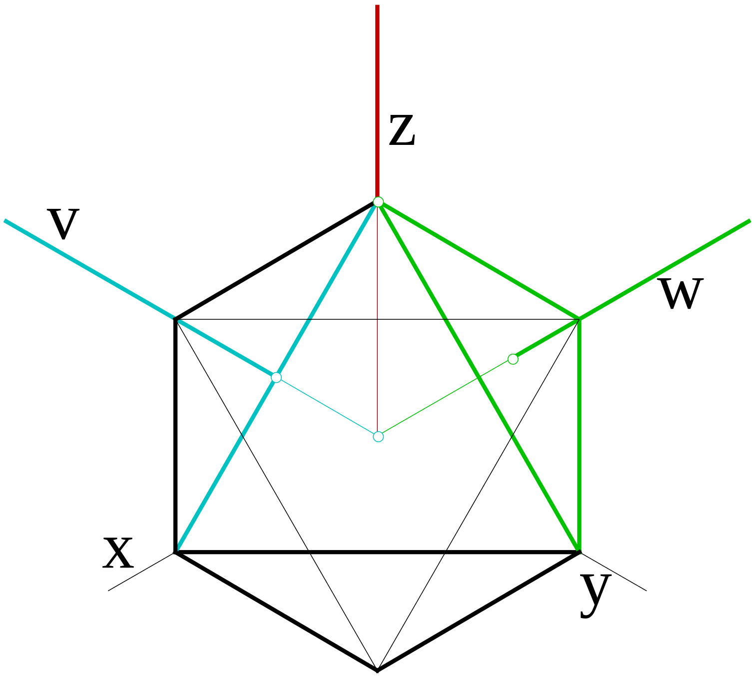

FIGURA 9.

quatro. A acção destas rotações sobre as faces do octaedro leva qualquer face verde a ocupar, sucessivamente, o lugar de todas as outras faces verdes e qualquer face roxa a ocupar, sucessivamente, o lugar de todas as outras faces roxas. O conjunto das faces verdes e o conjunto das faces roxas constituem as órbitas dessa acção (ver figura 10). Há, portanto, duas órbitas, cada uma com quatro elementos. Exprime-se isto dizendo, relativamente à acção deste subgrupo, que é do tipo $(1, 2\times 4)$. A primeira componente, o 1, refere-se ao determinante.

b) Consideremos, nas figuras 9 e 11, as rotações de $0°$, $120°$ e $240°$ em torno do eixo dos ww. Formam um subgrupo de Ω^+ de ordem três. A acção destas rotações sobre as faces do octaedro mantém tanto a face verde como a amarela (que é a oposta à verde) e leva qualquer face azul a ocupar, sucessivamente, o lugar de todas as outras faces azúis e qualquer face roxa a ocupar, sucessivamente, o lugar de todas as outras faces roxas. O conjunto constituido pela face verde, o conjunto constituido pela face amarela, o conjunto das faces azúis e o conjunto das faces roxas constituem as órbitas dessa acção (ver figura 11). Há, portanto, quatro órbitas, duas com três elementos cada, e duas com um único elemento cada. Exprime-se isto dizendo, relativamente à acção deste subgrupo,

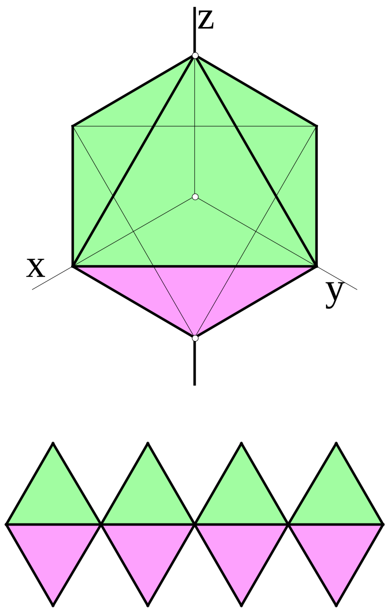

FIGURA 10.

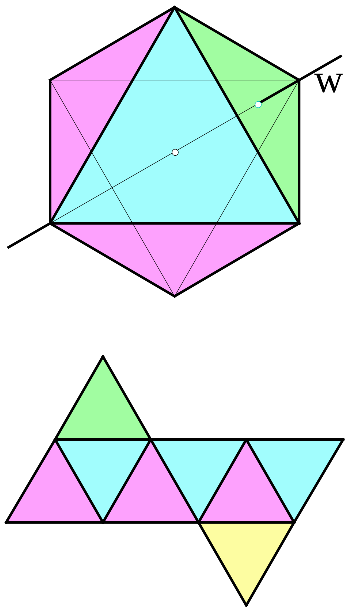

FIGURA 11.

que é do tipo $(1, 2 \times 1 + 2 \times 3)$. A primeira componente, o 1, refere-se ao determinante.

4.3. **O grupo das placas.** O grupo das placas do puzzle do octaedro é $S_4^{\pm} \equiv \{-1, 1\} \times S_4$. Se $(\delta_1, \sigma_1), (\delta_2, \sigma_2) \in S_4^{\pm}$, então $(\delta_1, \sigma_1)(\delta_2, \sigma_2) = (\delta_1\delta_2, \sigma_1\sigma_2)$. Este grupo actua sobre as placas do puzzle da forma que a figura 12 descreve sendo $s_1 = (1, \sigma)$, $s_2 = (-1, \sigma)$, $a_1 = \sigma(a)$, $b_1 = \sigma(b)$, $c_1 = \sigma(c)$.

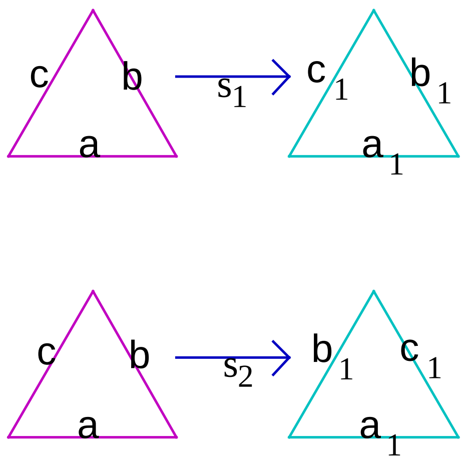

FIGURA 12.

Vejamos dois exemplos:

a) Se $s = (1, (1234))$, ver figura 13.

Neste caso $s \equiv \sigma = (1234)$, e $A_1 = \sigma(A_0)$, $A_2 = \sigma(A_1)$, $A_3 = \sigma(A_2)$, $A_0 = \sigma(A_3)$, $B_1 = \sigma(B_0)$, $B_2 = \sigma(B_1)$, $B_3 = \sigma(B_2)$, $B_0 = \sigma(B_3)$. Os conjuntos $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, $\{B_0, B_1, B_2, B_3\}$, são as órbitas da acção do subgrupo, de ordem quatro, gerado por $s \equiv \sigma = (1234)$, no conjunto das placas. Exprime-se isto dizendo, relativamente à acção do subgrupo gerado por s, que é do tipo $(1, 2 \times 4)$. A primeira componente, o 1, refere-se à primeira componente de s.

b) Se $s = (1, (123))$, ver figura 14.

Neste caso $s \equiv \sigma = (123)$, e $A = \sigma(A)$, $B = \sigma(B)$, $C_1 = \sigma(C_0)$, $C_2 = \sigma(C_1)$, $C_0 = \sigma(C_2)$, $D_1 = \sigma(D_0)$, $D_2 = \sigma(D_1)$, $D_0 = \sigma(D_2)$. Os conjuntos $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C_0, C_1, C_2\}$, $\{D_0, D_1, D_2\}$, são as órbitas da acção do subgrupo, de ordem três, gerado por $s \equiv \sigma = (123)$, no conjunto das placas. Exprime-se isto dizendo, relativamente à acção do subgrupo gerado por s, que é do tipo $(1, 2 \times 1 + 2 \times 3)$. A primeira componente, o 1, refere-se à primeira componente de s.

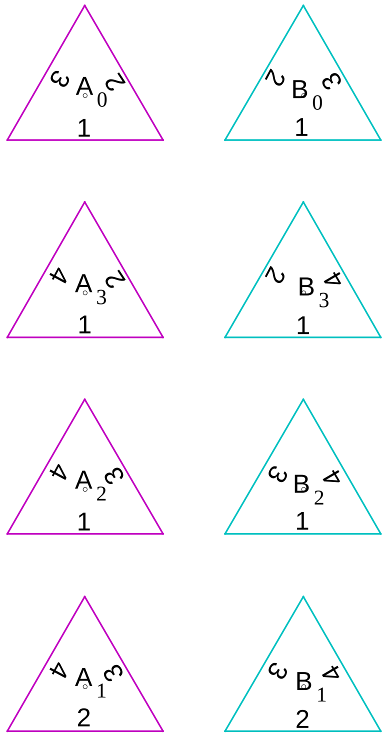

FIGURA 13.

5. Soluções

Como já vimos, dar uma solução do puzzle implica dar uma função $\varepsilon : E \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos agora estudar em mais pormenor as soluções do puzzle do octaedro.

5.1. **Soluções naturais.** Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : E \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ duas soluções do puzzle do octaedro. Diz-se que representam a mesma **solução natural**, se existir $\omega : E \longrightarrow E$, $\omega \in \Omega^+$, tal que

$$\varepsilon_1 \circ \omega = \varepsilon_2.$$

Esta relação entre ε_1 e ε_2 é uma relação de equivalência, e uma solução natural é uma sua classe de equivalência. Note-se que se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, então ω é a identidade.

Na prática, duas representantes de uma mesma solução natural não se distinguem, porque não há sistema cartesiano de eixos associado ao poliedro como vemos na figura 4.

A figura 15 mostra duas soluções que, não sendo iguais, representam a mesma solução natural.

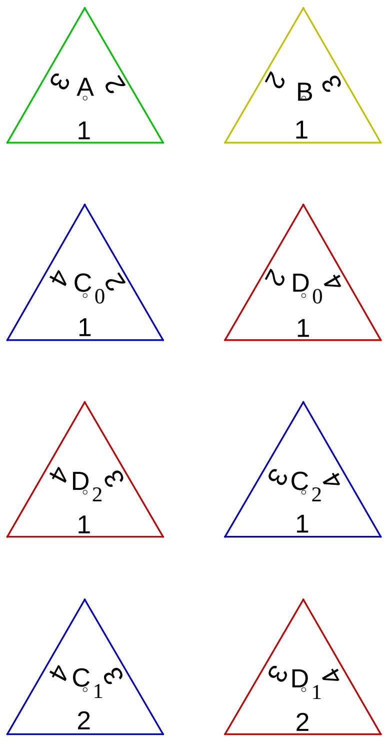

FIGURA 14.

O puzzle do octaedro tem dezasseis soluções naturais distintas. Eis aqui uma tarefa que pode ser desenvolvida na sala de aula. Cada aluno pode fazer, independentemente dos outros alunos, o seu puzzle, e, em seguida confronta o resultado com os colegas. Contam as soluções diferentes que encontraram e discutem as diferenças entre as soluções. O que se segue é também uma ajuda para essa discussão.

5.2. **O grupo de uma solução.** O grupo $S_4 \times \Omega$ define-se com o seguinte produto: se $(\sigma_1, \omega_1), (\sigma_2, \omega_2) \in S_4 \times \Omega$, então $(\sigma_1, \omega_1)(\sigma_2, \omega_2) = (\sigma_1\sigma_2, \omega_2\omega_1)$.

Seja $\varepsilon : E \to \{1, 2, 3, 4\}$ uma solução do puzzle. O grupo desta solução, G_ε, é o subgrupo de $S_4 \times \Omega$, tal $(\sigma, \omega) \in G_\varepsilon$ se

$$\sigma \circ \varepsilon \circ \omega = \varepsilon,$$

ou, equivalentemente,

$$\varepsilon \circ \omega = \sigma^{-1} \circ \varepsilon.$$

Esta igualdade implica que a ordem de ω é igual à ordem de σ, ou seja que ω^k é a identidade se e só se $\sigma^k = \sigma_0$. A generalização desta propriedade pode ser consultada na referência [3]. Nos dois exemplos

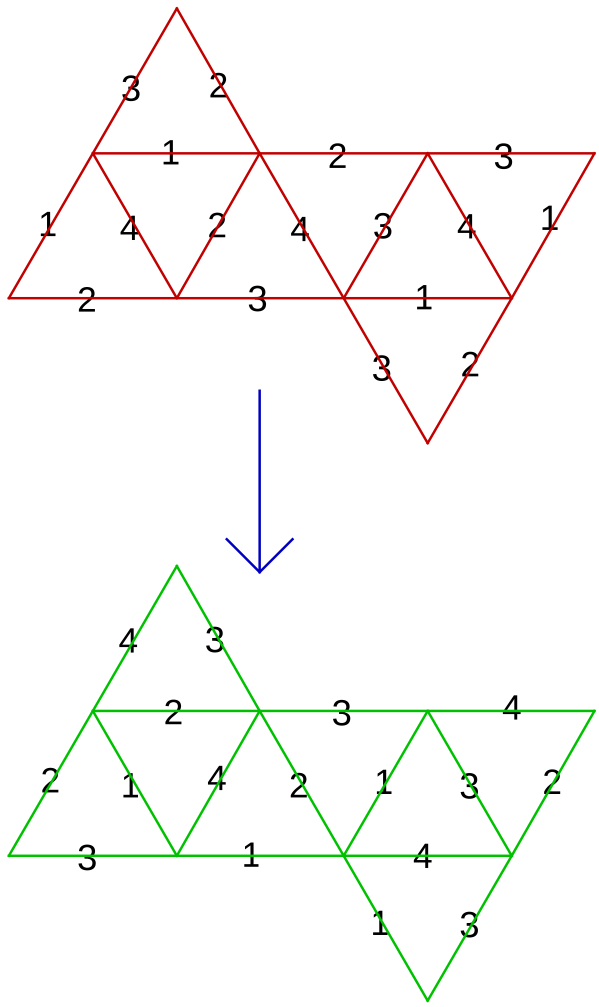

Figura 15.

seguintes procurar-se-ão soluções cujos grupos tenham como subgrupos pré-determinados grupos cíclicos.

a) A figura 16 mostra as diferentes possibilidades quando ω é a rotação de $90°$ em torno do eixo dos zz (figura 9) e $\sigma = (1234)$. A classe de equivalência A da figura 13 tem que estar toda sobre as faces verdes ou toda sobre as faces roxas. Se A estiver sobre as faces verdes, B está sobre as faces roxas. Se A estiver sobre as faces roxas, B está sobre as faces verdes.

b) A figura 17 mostra as diferentes possibilidades quando ω é a rotação de $120°$ em torno do eixo dos ww (figura 9) e $\sigma = (123)$. Pomos a placa A sobre a face verde. Claro que B tem de estar sobre a face amarela. A

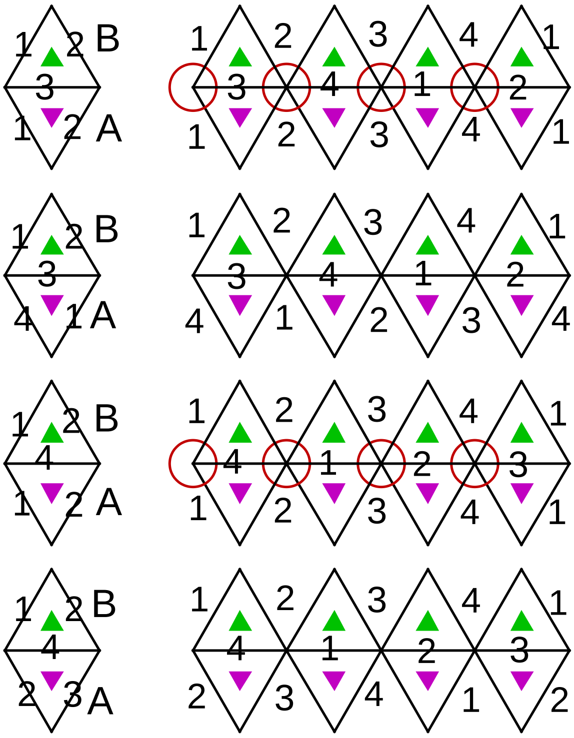

FIGURA 16.

classe de equivalência C da figura 14 tem que estar toda sobre as faces azúis ou toda sobre as faces roxas. Se C estiver sobre as faces azúis, D está sobre as faces roxas. Se C estiver sobre as faces roxas, D está sobre as faces azúis.

5.3. **Soluções equivalentes.** Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : E \to \{1,2,3,4\}$ duas soluções do puzzle do octaedro. Diz-se que são equivalentes, se existirem $\omega \in \Omega$, $\sigma \in S_4$ tais que

$$\sigma \circ \varepsilon_1 \circ \omega = \varepsilon_2.$$

Claro que, como o nome indica, esta relação entre ε_1 e ε_2 é uma relação de equivalência. Duas representantes de uma mesma solução natural são, obviamente equivalentes. O puzzle do octaedro tem três classes de equivalência, que se identificam olhando para os vértices. Numa solução, em cada vértice concorrem quatro números, podendo haver duas situações distintas: a) ou são todos diferentes, b) ou há uma repetição. Os vértices do caso b) estão marcados nas figuras 16 e 17 com um círculo. Nessa solução ou há 0 vértices do tipo b), ou há 4 vértices do tipo b), ou há 6 vértices do tipo b). São as três classes de equivalência, que, aliás, aparecem nas figuras 16 e 17.

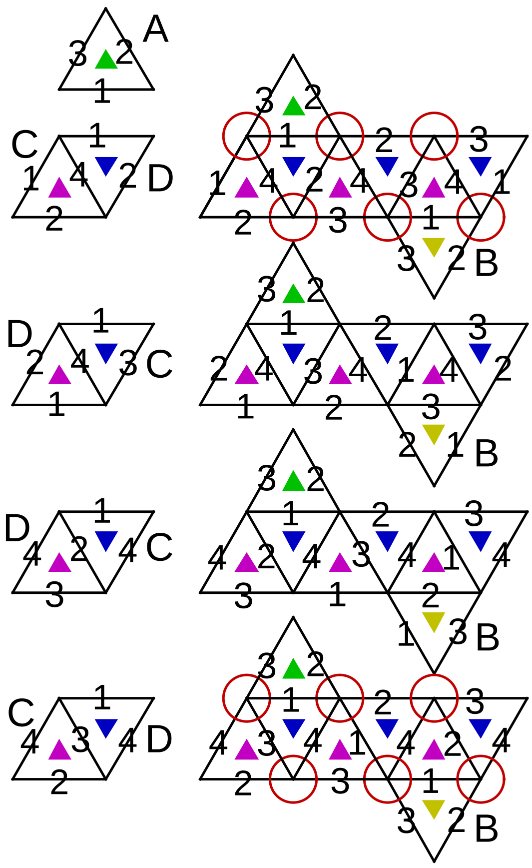

Figura 17.

Se uma solução tem 0 vértices do tipo b), diz-se que é uma solução natural canónica (das duas existentes). O seu grupo tem ordem 24 e ajuda a identificar Ω^+ com S_4. Veja-se a figura 18.

As quatro rotações em torno do eixo dos zz que pertencem a Ω, associam-se facilmente aos quatro elementos do grupo gerado por (1234). As três rotações em torno do eixo dos ww que pertencem a Ω, associam-se facilmente aos três elementos do grupo gerado por (123). As duas rotações em torno do eixo dos vv que pertencem a Ω, associam-se facilmente aos dois elementos do grupo gerado por (23). E assim sucessivamente.

Se uma solução tem 4 vértices do tipo b), o seu grupo inclui também (σ_0, ω) em que ω é a reflexão (determinante -1) que usa como espelho o plano do equador, isto é, o plano xy. O seu grupo tem ordem 8.

Se uma solução tem 6 vértices do tipo b), o seu grupo inclui também três elementos $((ab), \omega)$, em que ω é uma rotação de 180° em torno de

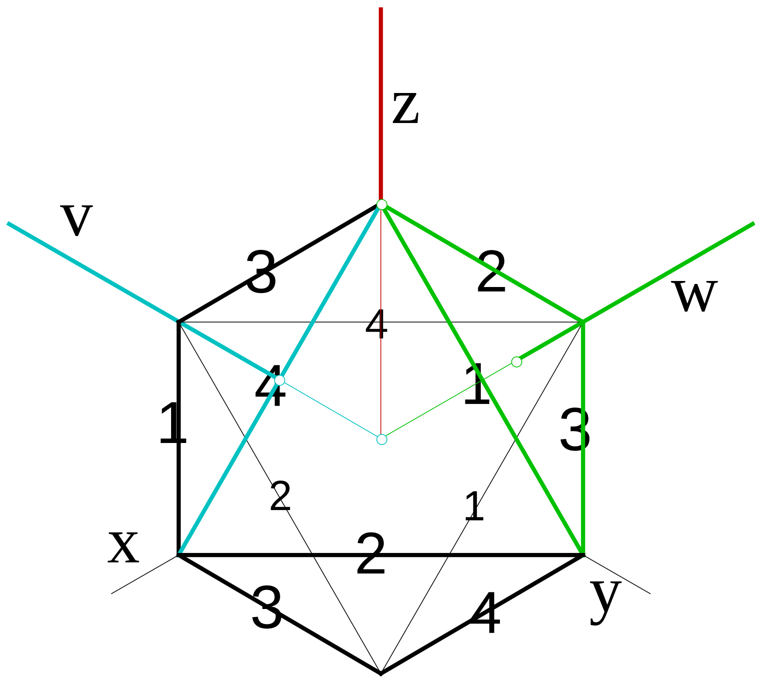

FIGURA 18.

um eixo ortogonal ao eixo dos ww, que passa pelos centros de arestas opostas. O seu grupo tem ordem 6.

Agradecimentos

O autor agradece à SPM e, em particular, à Professora Suzana Metello de Nápoles, o apoio que lhe foi dado.

Referências

[1] Jorge Rezende: *Jogos com poliedros e permutações*. Boletim da SPM, nº 43, 105-124 (2000).
[2] Jorge Rezende: *Puzzles com poliedros e números*. Edição da SPM, Lisboa (2001).
[3] Jorge Rezende: *Puzzles with polyhedra and permutation groups*. Pré-publicação, 2001.

Grupo de Física-Matemática da Universidade de Lisboa, Av. Prof. Gama Pinto 2, 1649-003 Lisboa, Portugal, e Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

E-mail address: `rezende@cii.fc.ul.pt`